Rogers-Ramanujanの恒等式とG.C.M. Lie Algebra : Feingold-Lepowskyの仕事について (リー環,代数群とその周辺)

成瀬, 弘

数理解析研究所講究録
394巻 1980年 54-66

Rogers-Ramanujanの恒等式とG.C.M. Lie algebra
――― Feingold-Lepowskyの仕事について ―――

東大 理　　成瀬 弘

§.0 序

古典的によく知られたRogers-Ramanujanの恒等式というのがある。これはある種の分割数の関係を表わしているが、現在知られている証明は、かなり複雑でその本質的な意味は依然として不明である。一方、Kac, Moodyにより Cartan行列の概念の拡張から、新しいLie環の系列 G.C.M. Lie algebra が考え出され、最近 Lepowsky その他の人々によりその表現論等が、半単純Lie環の時と、ほぼ同じように成立することがわかり、特に、Weylの指標公式,分母公式などを、適当に変数を特殊化するとEuler, Jacobi 等の古典的な等式が導びけることや、Macdonaldの等式の自然な意味付けが出来ることがわかった。このようなことから、Rogers-Ramanujanの恒等式も、同じようにG.C.M. Lie algebraにより証明されることが期待される。しかし今のところこのような証明は

まだ見つかっていない。ただ、その布石として[Lepowsky-Milne][Feingold-Lepowsky]により、$A_1^{(1)}$型のG.C.M. Lie algebraのあるstandard moduleの指標公式を適当に特殊化すると、その一部にRogers-Ramanujanの恒等式の左辺が現われるという観察がある。ここでは、その事実の紹介と合わせてRogers-Ramanujanの恒等式のSchurによる組合せ論的な証明を述べたい。

§1 Rogers-Ramanujanの恒等式，およびその拡張

1.1 いわゆるRogers-Ramanujanの恒等式とは次の2つをさす。

$$\text{(R1)} \qquad \frac{1}{\prod_{n\geq 1}(1-q^{5n-1})(1-q^{5n-4})} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

$$\text{(R2)} \qquad \frac{1}{\prod_{n\geq 1}(1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

歴史的には、Rogers, Ramanujan, Schur, Watson らによっていろいろな証明がなされてきた。ここでは後に、Schurによる Combinatorial proof を紹介するが、その前に、この式の分割数としての解釈，Gordon, Andrewsによる拡張を述べておく。

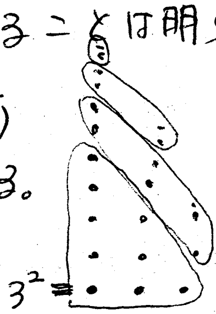
両辺のq^nの係数を分割数として解釈すると

(R1′) nの分割で各partが$5m\pm 1$の形の数 $=$ nの分割$(b_1, b_2, \cdots, b_r)$で $b_i \geq b_{i+1}+2$ $(i=1,\cdots,r-1)$をみたすものの数

(R2') nの分割で各partが$5m\pm2$の形のものの数

$=$ nの分割$(b_1, b_2, \cdots, b_r)$で, $b_i \geq b_{i+1}+2$, $b_r \geq 2$の形のものの数

を得る。左辺がそれぞれの対応する母関数であることは明らか。右辺は、R1)については、第i項 $\dfrac{q^{i^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^i)}$ は R1)の右辺で $r=i$ のものの母関数となっている。$i=3$のとき右図参照。R2)も同様。



(注) 一般にとなり合った数の差がk以上の分割の母関数は、

$$f_k(q) = 1 + \frac{q}{(1-q)} + \frac{q^{1+(k+1)}}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^{1+(k+1)+(2k+1)}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots = 1 + \sum \frac{q^{r+\frac{r(r-1)}{2}k}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^r)}$$

と書ける。さらに $k=1$の時 $f_1(q) = \dfrac{1}{\prod_{k\geq1}(1-q^{2k-1})}$

$k=2$の時 $f_2(q) = \dfrac{1}{\prod_{k\geq1}(1-q^{5k-1})(1-q^{5k-4})}$

と表示できる。しかし$k\geq3$の時は、このような積表示は知られていないようである。($k=3$の時係数を比べてこの形は存在しないことがわかる。)

1.2 Gordon, Andrewsの拡張

(R1') (R2')の解釈を一般化してGordonは次の結果を得た。

$A_{k,i}(n) := \{n$の分割$(a_1, a_2, \cdots, a_r) \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r,\ a_j \not\equiv 0, \pm i \bmod (2k+1)\}$

$B_{k,i}(n) := \{n$の分割$(b_1, b_2, \cdots, b_s) \mid b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_s,\ b_j - b_{j+k-1} \geq 2,$ 1は高々$i-1$回現われる$\}$

と定義する時、

定理 (Gordon) $\# A_{k,i}(n) = \# B_{k,i}(n)$

とくに、$k=i=2$のとき(R1')、$k=2$, $i=1$のとき(R2')である。

証明は後に述べるSchurの方法をそのまま一般化してできる。

例. $k=3$. $i=1$. $n=9$ のとき. $2k+1=7$.

$A_{3,1}(9)=\{(9),(5,4),(5,2,2),(4,3,2),(3,3,3),(3,2,2,2)\}$

$B_{3,1}(9)=\{(9),(7,2)\ (6,3),(5,4),(5,2,2),(4,3,2)\}$

$\#A_{3,1}(9)=\#B_{3,1}(9)=6$.

Andrewsは. (R1),(R2) の恒等式としての拡張を行なった。

定理 (Andrews)

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0,\pm i \bmod (2k+1)}}^{\infty}(1-q^n)^{-1}=\sum_{n_1,n_2,\dots,n_{k-1}\geq 0}\frac{q^{N_1^2+N_2^2+\cdots+N_{k-1}^2+N_i+N_{i+1}+\cdots+N_{k-1}}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}}$$

ここで $(q)_n=(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$

$N_j=n_j+n_{j+1}+\cdots+n_{k-1}$

とくに. $k=i=2$ のとき(R1), $k=2$. $i=1$ のとき (R2) となる。

(注) 左辺が Gordon の $A_{k,i}(n)$ の母関数であることは明らかだが.

右辺が: $B_{k,i}(n)$ の母関数であることの直接証明は知られていないようだ。

1.3 Schur による Rogers-Ramanujan の式の証明.

Franklinによる Euler's pentagonal number theorem の証明法と似たやり方で証明する。Jacobiの恒等式

(J) $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1-h^{2\nu-1}z^2)(1-h^{2\nu-1}z^{-2})=\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}(-1)^{\lambda}z^{2\lambda}h^{\lambda^2}$

は既知として使用する。

$$\phi_1:=\frac{1}{\prod_{n\geq 1}(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}\qquad \phi_2:=\frac{1}{\prod_{n\geq 1}(1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})}$$

$\psi:=\prod_{n\geq 1}(1-q^n)$ とおくと,

$$\psi(q)\cdot\phi_1(q)=\prod_{n\geq 1}(1-q^{5n})(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})\overset{☆}{=}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\lambda}\ q^{\frac{5\lambda^2-\lambda}{2}}$$

$$\psi(q)\cdot\phi_2(q)=\prod_{n\geq 1}(1-q^{5n})(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})\overset{☆☆}{=}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\lambda}\ q^{\frac{5\lambda^2-3\lambda}{2}}$$

☆は(T)で $h=q^{\frac{5}{2}}$, $z=q^{\frac{1}{2}}$, ☆☆は(T)で $h=q^{\frac{5}{2}}$, $z=q^{\frac{3}{2}}$ とおいて得られる。2つをまとめると $\psi(q)\phi_\mu(q)=\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}(-1)^{\lambda}q^{\frac{5\lambda^2-(2\mu-1)\lambda}{2}}$ $(\mu=1,2)$

(R1')の右辺を $Z_1(n)$, (R2')の右辺を $Z_2(n)$ とし $\zeta_\mu=\sum_{n=0}^{\infty}Z_\mu(n)q^n$ $(\mu=1,2)$

この時 (#) $\quad \psi(q)\ \zeta_\mu(q)=\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}(-1)^{\lambda}\ q^{\frac{5\lambda^2-(2\mu-1)\lambda}{2}}$ $\quad(\mu=1,2)$

を示せば R1') R2') したがって R1), R2) が証明できたことになる。

(#)の左辺の q^m の係数は $A_m:=\{(a_1,\cdots,a_\ell|b_1,\cdots b_\ell)$: partition pair $|$ $\Sigma a_i+\Sigma b_i=m$, $a_1>a_2>\cdots>a_\ell$, $(b_1,\cdots,b_\ell)$ は $b_j-b_{j+1}\geq 2$ をみたす $\mu=2$ の時はさらに $b_\ell\geq 2\}$

$A_m^e=\{(a_1\cdots a_\ell|b_1\cdots b_\ell)\in A_m \mid \ell$ は偶数$\}$

$A_m^o=\{(a_1\cdots a_\ell|b_1\cdots b_\ell)\in A_m \mid \ell$ は奇数$\}$ とした時、$|A_m^e|-|A_m^o|$ となる。

以下 $m\geq 4$ を1つ固定し A_m を4つの部分に分割する。(m=0,1,2,3,4のときは直接計算で q^m の係数は等しい)

$A_m=A^+\amalg A^-\amalg B\amalg C$, $\quad A^+=\{(a_1\cdots a_\ell|b_1\cdots b_\ell)\in A_m \mid b_1>a_1$ または $\ell=0\}$

$A^-=\{(a_1\cdots a_\ell|b_1\cdots b_\ell)\in A_m \mid a_1>b_1+1$ または $\ell=0\}$ $\quad B=\{(a_1\cdots a_\ell|b_1\cdots b_\ell)\in A_m \mid a_1=b_1\}$

$C=\{(a_1\cdots a_\ell|b_1\cdots b_\ell)\in A_m \mid b_1=a_1-1\geq 1\}$

(#)の右辺の q^m の係数は 0または±1 となる事に注目し A_m^e と A_m^o の間に高々1コの例外を除いて1:1の写像がある事を示しその例外が $m=\frac{5\lambda^2-(2\mu-1)\lambda}{2}$ のとき λ の偶,奇に応じて A_m^e に1コまたは A_m^o に1コ余りが生ずることを示せばよい。

$A^+ \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} A^-$ を $\quad f((a_1,\cdots a_\ell|b_1\cdots b_\ell))=(b_1,a_1,\cdots a_\ell|b_2,\cdots b_\ell)$

$\quad g((a_1,\cdots,a_\ell|b_1\cdots b_\ell))=(a_2,\cdots a_\ell|a_1,b_2,\cdots b_\ell)$

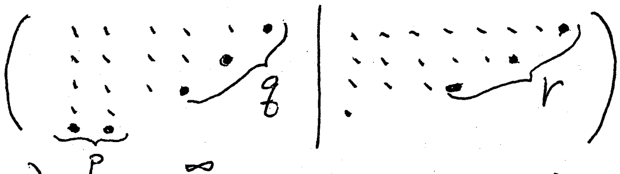
とすれば f は A^+，g は A^- のすべての元に対して定義され，互いに他の逆を与えている。しかも f, g により k が偶数のものは奇数，奇数のものは偶数に写るから $A^+ \amalg A^-$ 中に k が偶数のものと奇数のものが丁度１つずつ pair をなしていることがわかる。よってのこりの $B \amalg C$ について考えればよい。

今各 $(a_1,\cdots,a_k \mid b_1,\cdots,b_l) \in A_m$ に対し，3つの整数の対 (p, q, r) を，

$p = \begin{cases} 0 & k=0 \\ a_k & k>0 \end{cases}$　q を $a_1-a_2=a_2-a_3=\cdots=a_{q'-1}-a_{q'}=1$ なる最大の q'

r を $b_1-b_2=b_2-b_3=\cdots=b_{r'-1}-b_{r'}=2$ なる最大の r'

と定める。図式的には右の様。



これにより

$$B = \coprod_{\nu=1}^{\infty} \left(B_{\nu,1} \amalg B_{\nu,2} \amalg B_{\nu,3}\right) \quad C = \coprod_{\nu=1}^{\infty} \left(C_{\nu,1} \amalg C_{\nu,2} \amalg C_{\nu,3}\right)$$

と分解する（実は有限直和）。

ここで，

$B_{\nu,1} = \{(a \cdots \mid b \cdots) \in B \mid p=\nu,\ q \geq \nu,\ r \geq \nu$ なるもの$\}$

$B_{\nu,2} = \{(a \mid b) \in B \mid p>\nu,\ q \geq \nu,\ r=\nu$ なるもの$\}$

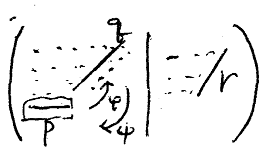
$B_{\nu,3} = \{(a \mid b) \in B \mid p>\nu,\ q=\nu,\ r>\nu$ なるもの$\}$

$C_{\nu,1} = \{(a \mid b) \in C \mid p>\nu,\ q=\nu,\ r \geq \nu$ 〃 $\}$

$C_{\nu,2} = \{(a \mid b) \in C \mid p=\nu,\ q \geq \nu,\ r \geq \nu$ 〃 $\}$

$C_{\nu,3} = \{(a \mid b) \in C \mid p>\nu,\ q>\nu,\ r=\nu$ 〃 $\}$

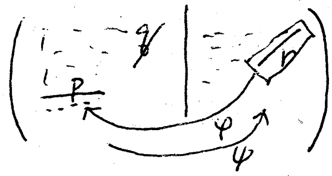
$B_{\nu,1} \underset{\psi_{\nu,1}}{\overset{\varphi_{\nu,1}}{\rightleftarrows}} C_{\nu,1}$ を



$\varphi_{\nu,1}(a_1 \cdots a_k \mid b_1 \cdots b_l) = (a_1+1, a_2+1, \cdots, a_\nu+1, a_{\nu+1} \cdots a_{k-1} \mid b_1 \cdots b_l)$

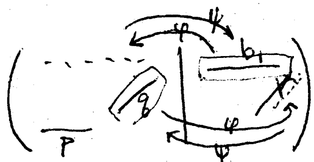
$\psi_{\nu,1}(a_1 \cdots a_k \mid b_1 \cdots b_l) = (a_1-1, a_2-1, \cdots, a_\nu-1, a_{\nu+1}, \cdots, a_k, \nu \mid b_1 \cdots b_l)$

$B_{\nu,2} \underset{\psi_{\nu,2}}{\overset{\varphi_{\nu,2}}{\rightleftarrows}} C_{\nu,2}$ を



$$\varphi_{\nu,2}(a_1 \cdots a_k \mid b_1 \cdots b_l) = (a_1, \cdots, a_k, \nu \mid b_1 - 1, b_2 - 1, \cdots, b_\nu - 1, b_{\nu+1}, \cdots, b_l)$$

$$\psi_{\nu,2}(a_1 \cdots a_k \mid b_1 \cdots b_l) = (a_1, \cdots, a_{k-1} \mid b_1 + 1, b_2 + 1, \cdots, b_\nu + 1, \cdots b_l)$$



$B_{\nu,3} \underset{\psi_{\nu,2}}{\overset{\varphi_{\nu,3}}{\rightleftarrows}} C_{\nu,3}$ を

$$\varphi_{\nu,3}(a_1 \cdots a_k \mid b_1 \cdots b_l) = (b_1, a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_\nu - 1, a_{\nu+1}, \cdots a_k \mid b_2 + 1, b_3 + 1, \cdots b_{\nu+1} + 1, b_{\nu+2}, \cdots b_l)$$

$$\psi_{\nu,3}(a_1 \cdots a_k \mid b_1 \cdots b_l) = (a_2 + 1, a_3 + 1, \cdots a_{\nu+1} + 1, a_{\nu+2}, \cdots a_k \mid a_1, b_1 - 1, b_2 - 1, \cdots, b_\nu - 1, b_{\nu+1}, \cdots, b_l)$$

とおくとほとんどすべてで定義され．$\varphi_{\nu,i}$ と $\psi_{\nu,i}$ は互いに他の逆になる。しかも偶奇を逆にしているから．pair が作れる。定義されないのは．次の４つの型のみ．

I. $a = (2\nu-1, 2\nu-2, \cdots, \nu+1, \nu)$，$b = (2\nu-1, 2\nu-3, \cdots, 3, 1)$ のとき $\varphi_{\nu,1}$ は．def されず．

$m = \dfrac{5\nu^2 - \nu}{2}$，（これは $\mu = 1$．のとき 起る）

II. $a = (2\nu, 2\nu-1, \cdots, \nu+2, \nu+1)$，$b = (2\nu, 2\nu-2, \cdots, 4, 2)$ のとき．$\varphi_{\nu,2}$ は def されず，

$m = \dfrac{5\nu^2 + 3\nu}{2}$ （$\mu = 2$ のとき）

III $a = (2\nu, 2\nu-1, \cdots, \nu+1)$ $b = (2\nu-1, 2\nu-3, \cdots, 3, 1)$ のとき $\psi_{\nu,1}$ は def されず

$m = \dfrac{5\nu^2 + \nu}{2}$ （$\mu = 1$ のとき）

IV $a = (2\nu+1, 2\nu, \cdots, \nu+2, \nu+1)$ $b = (2\nu, 2\nu-2, \cdots, 4, 2)$ のとき $\psi_{\nu,3}$ は def されず

$m = \dfrac{5(\nu+1)^2 - 3(\nu+1)}{2}$ （$\mu = 2$ のとき）

$\mu = 1, 2$ の場合．それぞれ．上の例外の a の長さの偶奇に応じて 1,-1．とすると丁度 (#) の式が得られ証明が終る。

§2. G.C.M. Lie algebra および Numerator formula.

ここでは G.C.M. Lie algebra の復習と、Weyl-Kac formula、Denominator formula, Numerator formula を紹介する。詳しくは小池和彦氏の報告を見て頂きたい。

$A=(A_{ij})$ を $(l+1)\times(l+1)$ の Cartan行列とする。すなわち $A_{ij}\in\mathbb{Z}$, $A_{ii}=2$ $(\forall i)$, $A_{ij}\leq 0$ $(i\neq j)$, $A_{ij}=0 \Leftrightarrow A_{ji}=0$ これに対し、$\mathbb{C}$ 上の Lie algebra $\mathfrak{l}(A)$ を次のように定める。$\mathfrak{l}_1$ を、$3(l+1)$ コの生成元 h_i, e_i, f_i $i=0,\dots,l$ で生成され、基本関係

$[h_i,h_j]=0$, $[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i$, $[h_i,e_j]=A_{ij}e_j$, $[h_i,f_j]=-A_{ij}f_j$

$(\mathrm{ad}\,e_i)^{-A_{ij}+1}e_j=(\mathrm{ad}\,f_i)^{-A_{ij}+1}f_j=0$ $(i\neq j)$ をもつ Lie algebra とする。これは自然に graded Lie algebra とみなせる。$\mathfrak{r}\subset\mathfrak{l}_1$ を $\langle h_i,e_i,f_i\rangle_{i=0,\dots,l}\cap\mathfrak{r}=0$ をみたす最大の graded ideal とし、$\mathfrak{l}(A)=\mathfrak{l}_1/\mathfrak{r}$ と定義する。

$\mathfrak{h}=\langle h_0,\dots,h_l\rangle$, D_i を $\mathfrak{l}$ の derivation で grading に関し i 番目の grade をかけるものとし、$\mathfrak{D}_0=\langle D_0,\dots,D_l\rangle \supset \mathfrak{D}$ subspace $\mathfrak{h}^e=\mathfrak{D}\times\mathfrak{h}\subset\mathfrak{l}^e=\mathfrak{D}\times\mathfrak{l}$ とする simple root $\alpha_i\in(\mathfrak{h}^e)^*$ $i=0,\dots,l$ を $[h,e_i]=\alpha_i(h)e_i$ $\forall h\in\mathfrak{h}^e$ で定める。$\alpha_j(h_i)=A_{ij}$ となる。$\mathfrak{D}$ として $\alpha_0,\dots,\alpha_l$ が線型独立となる最小のものをとり固定しておく。

$(\mathfrak{h}^e)^*$ の鏡映 r_i $(0\leq i\leq l)$ を $r_i(\phi)=\phi-\phi(h_i)\alpha_i$, $\phi\in(\mathfrak{h}^e)^*$ で定め $W=\langle r_0,\dots,r_l\rangle$ を Weyl 群と呼ぶ。$\mathfrak{h}^e$ の basis を $\{h_0,\dots,h_l,d_1,\dots,d_r\}$ とし $(\mathfrak{h}^e)^*$ の dual basis を $\{h_0^*,\dots,h_l^*,d_1^*,\dots,d_r^*\}$

とする。$\lambda\in(\mathfrak{h}^e)^*$ が integral とは $\lambda(h_i)\in\mathbb{Z}$ $^\forall i=0,\dots,\ell$, $\lambda\in(\mathfrak{h}^e)^*$ が dominant integral とは $\lambda(h_i)\in\mathbb{Z}_+$ $i=0,\dots,\ell$, なることをいう。

$P=\{\text{dominant integral}\}=\mathbb{Z}_+h_0^*+\cdots+\mathbb{Z}_+h_\ell^*+\mathfrak{d}^*$ とおく。

$\rho\in P$ を $\rho=h_0^*+\cdots+h_\ell^*$ とする。$\rho(h_i)=1$ $0\le i\le\ell$ となる。

以下 行列 Aは symmetrizable とする。

$\mathfrak{g}^e$-module X に対し weight $\nu\in(\mathfrak{h}^e)^*$ の weight space を $X_\nu=\{x\in X\mid h\cdot x=\nu(h)x\ \ ^\forall h\in\mathfrak{h}^e\}$ で定める。各$\lambda\in P$ に対し λを heighest weight にもつ 既約な standard module X^λ が存在することが知られている。weight module X に対し 指標を $\chi(X)=\sum_{\nu\in(\mathfrak{h}^e)^*}\dim(X_\nu)\,e(\nu)$ で定める。この時次の指標公式が成立する。（Aが symmetrizable のときしか証明されていない）

[Weyl-Kac character formula] $$\frac{\chi(X^\lambda)}{e(\lambda)}=\frac{N(\lambda)}{D}$$

ここで
$$N(\lambda)=\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)\,e(w(\lambda+\rho)-(\lambda+\rho))$$
$$D=N(0)=\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)\,e(w\rho-\rho)$$

これらは $R=\mathbb{Z}[[e(-\alpha_0),\dots,e(-\alpha_\ell)]]$ の元である。

さらに分母については

[Denominator formula] $$D=\prod_{\varphi\in\Delta_+}(1-e(-\varphi))^{\dim\ell^\varphi}$$

が成立する。

分子については そのままでは 積公式はないが，$e(-\alpha_i)$たちを 適当に specialize すると 積表示をもつ。

$$R=\mathbb{Z}[[e(-\alpha_0),\cdots,e(-\alpha_\ell)]] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}[q]$$
$$e(-\alpha_i) \longmapsto q^{s_i} \qquad s_i\in\mathbb{Z}_+$$

により、環の準同型 φ を定義し、$f\in R$ に対し $\varphi(f)=f|_{(s_0,\cdots,s_\ell)}$ と書く。type $(s_0,\cdots,s_\ell)$ の specialization と呼ぶ。とくに type $(1,\cdots,1)$ の specialization を principal specialization という。

この時、$N(\lambda)$ の principal specialization は、次の積公式をもつ。

[Numerator formula] $$N(\lambda)|_{(1,\cdots,1)}=D'|_{((\lambda+\rho)(h_0),(\lambda+\rho)(h_1),\cdots,(\lambda+\rho)(h_\ell))}$$

ここで、D' は ${}^tA$ について作った G.C.M. Lie algebra $\mathfrak{l}'=\mathfrak{l}({}^tA)$ の指標公式の分母。

証明の概略．
$$\iota:\mathfrak{h}\longrightarrow R' \qquad \iota(h_i)=\alpha_i' \qquad R'=\langle\alpha_i'\rangle\subset(\mathfrak{h}'^e)^*$$
$$\iota:R\longrightarrow\mathfrak{h}' \qquad \iota(\alpha_j)=h_j' \qquad R=\langle\alpha_i\rangle\subset(\mathfrak{h}^e)^*$$

で linear map を定めると、bijection で pairing を保ち、さらに

$\iota: W\longrightarrow W'$ $\quad r_i\longmapsto r_i'$ とすると W の action とも compatible となる。

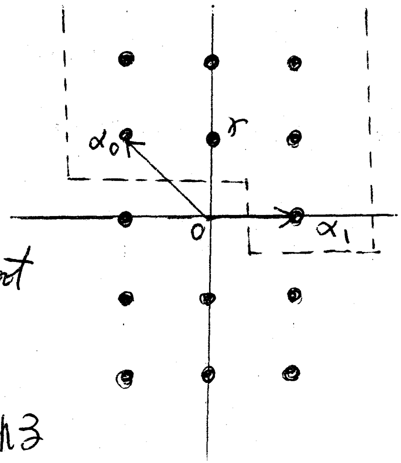
(Lemma.) $\lambda\in(\mathfrak{h}^e)^*$ に対し $\delta_\lambda'\in\mathfrak{h}'^e$ を、$\alpha_i'(\delta_\lambda')=(\lambda+\rho)(h_i)$ $\quad i=0,\cdots,\ell$ とするとき、$(\omega(\lambda+\rho)-(\lambda+\rho))(\delta)=(\iota(\omega)^{-1}\rho'-\rho')(\delta_\lambda')$ となる。

ここで $\delta\in\mathfrak{h}$ は $\alpha_i(\delta)=1$ $\ \forall i=0,\cdots,\ell$ なる元。

これを使うと、
$$\begin{aligned}N(\lambda)|_{(1,\cdots,1)}&=\sum_{w\in W}(\det\omega)\,q^{-(\omega(\lambda+\rho)-(\lambda+\rho))(\delta)} \quad \text{(Lemma)}\\&=\sum_{\omega\in W'}(\det\omega)\,q^{-(\iota(\omega)^{-1}\rho'-\rho')(\delta_\lambda')}\\&=\sum_{w\in W'}(\det\omega)\,q^{-(\omega\rho'-\rho')(\delta_\lambda')}\\&=D'|_{((\lambda+\rho)(h_0),\cdots,(\lambda+\rho)(h_\ell))}\end{aligned}$$
(略証終り)

§3. $A_1^{(1)}$型 GCM Lie algebra と Rogers-Ramanujan の等式.

ここでは $A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$ ($A_1^{(1)}$型) に対する G.C.M. Lie algebra の表現に対し §2の議論をあてはめて, 指標公式の specialization として, Andrews の Rogers-Ramanujan 等式の左辺が現われることを指摘する.



simple root を α_0, α_1 とするとき, Root 系は右図のようになる。(上下に無限につづく)

点線内は positive root で, imaginary root は $m\gamma$ の形のもの $m \in \mathbb{Z}$.

Weyl群は 2つの鏡映 r_0, r_1 で生成される無限位数の二面体群で, $r_0\alpha_0 = -\alpha_0$, $r_0\alpha_1 = \alpha_1 + 2\alpha_0$

$r_1\alpha_0 = \alpha_0 + 2\alpha_1$, $r_1\alpha_1 = -\alpha_1$

で作用する。

denominator は
$$D = \prod_{n\geq 1}(1-u^n v^n)(1-u^{n-1}v^n)(1-u^n v^{n-1})$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n u^{\frac{1}{2}n(n+1)} v^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

ここで $u = e(-\alpha_0)$, $v = e(-\alpha_1)$

$A = {}^tA$ に注意して Numerator formula を使うと,
$$N(\lambda)\big|_{(1,1)} = D\big|_{((\lambda+\rho)(h_0),\,(\lambda+\rho)(h_1))} \qquad (n_i = (\lambda+\rho)(h_i) \text{ とおく.})$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{(n_0+n_1)n})(1-q^{(n_0+n_1)n-n_0})(1-q^{(n_0+n_1)n-n_1})$$

また,
$$D\big|_{(1,1)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})$$

したがって、指標公式 $\left.\frac{\chi(V^\lambda)}{e(\lambda)}\right|_{(1,1)} = \frac{N(\lambda)|_{(1,1)}}{D\,|_{(1,1)}} = \frac{D|_{(n_0,n_1)}}{D|_{(1,1)}}$ より

定理.
$$\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n-1})\left.\frac{\chi(V^\lambda)}{e(\lambda)}\right|_{(1,1)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n\not\equiv 0,\pm n_0\ (\mathrm{mod}\ (n_0+n_1))}}^{\infty}(1-q^n)^{-1}$$

特に λ として $(\lambda+\rho)(h_0)=n_0=i$, $(\lambda+\rho)(h_0+h_1)=2k+1=n_0+n_1$ なるものをとると、右辺の積は丁度、Rogers-Ramanujanの式のAndrewsによる拡張の左辺に一致する。左辺の $\prod_{n\geq}(1-q^{2n-1})$ は、どういう意味をもつかはよくわかっていない。

(注) $\frac{\chi(V^\lambda)}{e(\lambda)}$ は [Feingold-Lepowsky] でより詳しく調べられ、$\lambda=n_0h_0^*+n_1h_1^*$ として $n_0+n_1\leq 3$ については explicit な形で与える公式が得られている。また重複度は帰納的に計算する方法がある。

参考文献.

[Kac] Infinite-Dimensional Algebras, Dedekind's η-Function, classical Möbius function and the Very strange Formula. Advanc. Math 30 (1978) 85-136

[Feingold-Lepowsky] The Weyl-Kac Character formula and power Series identities Advances Math 29 (1978) 271-309

[Lepowsky] Application of the numerator formula to k-Rowed Plane partitions Advance Math 35 (1980) 179–194

[Lepowsky-Milne] Lie algebra apploaches to Classical Partition identities Advances Math 29 (1978) 15–59

[Schur] Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche (1917) Gesammelte Abhandlungen Vol 2. pp. 117–136

[Andrews] The Theory of Partitions Encyclopedia of Math. Vol 2. Addison-Wesley 1976